

Lycée Ksibet El Mediouni  A.S : 2016 / 2017	DEVOIR DE CONTROLE N 1
	Epreuve: Mathématiques
	Section : Sciences Techniques
PROFS : Mr Mbarki Sabri ~ Mr Akrem Slimani	

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. L'élève doit indiquer sur sa copie, avec justification, le numéro de la question et la lettre convenable à la réponse choisie.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2(1 - \sin \frac{1}{x^2})$.
Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
a) $+\infty$ b) 0 c) 1
- Si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ alors $\arg(i\bar{z}) \equiv$
a) $\frac{\pi}{6} [2\pi]$ b) $-\frac{\pi}{6} [2\pi]$ c) $\frac{\pi}{3} [2\pi]$
- Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x \sin(\frac{1}{x}) - 1$ et
 $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) =$
a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $+\infty$
- Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $|z| = 2$ et $z' = z - \frac{1}{z}$,
Alors $|z'| =$
a) 0 b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{26}{3}$

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-6\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\pi(x-1)} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$.
 - Vérifier que pour tout $x < 1$ on a : $\frac{6}{\pi(x-1)} \leq f(x) \leq \frac{-6}{\pi(x-1)}$.
 - En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $f(x) = 1 + x + \sqrt{x}$.

- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - c) Etudier la continuité de f
 - d) Justifier que f est prolongeable par continuité en 1 et donner F son prolongement par continuité en 1.
- 3) La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$.

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))$

Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan complexe, on donne les points $A(1)$ et $B(-i)$. On considère les points $M(z)$ et $M'(z')$ vérifiant $z' = \frac{1-z}{1-iz}$ et $M \neq B$.

- 1) a) On pose $z = x + iy$.
Montrer que : z' est réel si et seulement si $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$
- b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' est réel.
- 2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$
- 3) a) Montrer que pour tout $z \neq -i$ on a : $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$
- b) En déduire $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$
- c) Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 4 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = 1$.

Pour tout entier naturel n, on considère les points M_n d'affixes $z_n = (z_A)^n$.

- 1) a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $|z_n| = |z_A| = 1$.
b) Déterminer un argument de z_A puis un argument de z_n .
- 2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier n pour que les points O, A et M_n soient alignés.
- 3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a :
 $|z| = 1$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
b) Montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ alors $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un réel.
c) En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a : $\frac{z_A+z_n}{1+z_Az_n} \in \mathbb{R}$.
- 4) a) Placer les points A, B et M_3
b) Montrer que le triangle ABM_3 est rectangle.